I. S. F. A. 2006-2007

Concours d'Entrée

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice non autorisée

L'épreuve est composée de 4 exercices indépendants de barèmes respectifs 20%, 20%, 20% et 40%

EXERCICE 1

1. On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$V_1 = (1,0,1,-1)$
$V_2 = (-1,1,-1,0)$ a et c : paramètres réels.
$V_3 = (0,a,1,c)$

Montrer qu'ils forment une base du sous espace F de $\mathbb{R}^4$ qu'ils engendrent.

Trouver une équation de F.

2. On note A la matrice 4 lignes, 3 colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ -1 & 0 & c \end{pmatrix}$$ a, b et c : paramètres réels.

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ ayant A pour matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$.

Quelles relations doivent vérifier a, b, c pour que f ne soit pas injective ?

Lorsque ces relations sont vérifiées : trouver la forme générale des matrices carrées B d'ordre 3 vérifiant AB = 0.

3. Dans l'écriture de A, on suppose maintenant b=1.

Montrer que l'équation AX = Y (pour $Y \in \mathbb{R}^4$ donné) a au plus une solution.

Quelle relation doit vérifier les composantes de Y pour que cette équation ait une unique solution ?

EXERCICE 2

Une substance A se décompose en 2 substances X et Y.

Au temps t=0, on suppose que l'on dispose d'une quantité a de substance A et d'une quantité nulle des substances X et Y.

On suppose que la quantité x(t) de substance X, au temps t, se forme a une vitesse x'(t) proportionnelle, à chaque instant t, à la quantité de substance A qu'il reste à cet instant, de même pour y(t).

Enfin, on suppose qu'au bout d'une heure la moitié de la substance A s'est décomposée donnant $\frac{a}{8}$ de substance X et $\frac{3a}{8}$ de substance Y.

1. Montrer qu'au bout de 4 heures les $\frac{15}{16}$ de la substance A se sont décomposés.

2. Déterminer x(t) et y(t) en fonction de t et de a.

EXERCICE 3

1. Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien et M un point de $\mathbb{R}^2$ de composantes notées x et y. On note $\|\vec{OM}\|$ la norme euclidienne du vecteur $\vec{OM}$ ($\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$).

   Montrer que, pour M différent de $O=(0,0)$, le gradient de $\|\vec{OM}\|$ est égal au vecteur unitaire $\dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$.

2. Soit ABC un triangle et $f(x,y)$ la fonction $f(M) = \|\vec{MA}\| + \|\vec{MB}\| + \|\vec{MC}\|$ ($M=(x,y)$) . Déterminer sur le domaine où f est différentiable l'ensemble des points où le gradient de f est nul.

3. Application : La surface au sol du CNIT à la Défense est un triangle équilatéral de coté l et de sommets A,B,C.
   En tout point M situé à l'intérieur ou sur le pourtour du triangle la hauteur du plafond est égal à :

   $z(M) = 2l - \|\vec{MA}\| - \|\vec{MB}\| - \|\vec{MC}\|$.

   On demande de déterminer les points du triangle où la hauteur du toit est extrémale (maximale et minimale) en vérifiant que ce minimum est bien positif ou nul. Calculer également la hauteur maximale du toit.

EXERCICE 4

On note $\boldsymbol{E}$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues de $\mathbb{R}^+$ (ensemble des réels positifs ou nuls) dans $\mathbb{R}$.

1. A toute fonction f de $\boldsymbol{E}$ on associe la fonction g définie par :

   $g(0) = \dfrac{f(0)}{2}$; $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt \quad pour\ x>0$.

   a- Montrer que la fonction g est un élément de $\boldsymbol{E}$.
   On note $T[f]$ la fonction g.

   b- Montrer que T est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$. Est-il injectif ? est-il surjectif ?
   Déterminer valeurs propres et fonctions « propres » de T.(c'est-à-dire les fonctions f et les réels λ tels que $T[f] = \lambda f$) .

2. On note $\boldsymbol{E}^+$ le sous ensemble de $\boldsymbol{E}$ des fonctions positives.
   Pour $\boldsymbol{n}$ entier naturel strictement positif on définit :
   $T^{(n)}$ le n-ième itéré de T ($T^{(1)}=T$; $T^{(n)}=To\ T^{(n-1)}$)
   et
   pour f élément de $\boldsymbol{E}$ la fonction $H_n[f]$ définie pour x>0 par :

   $$H_n[f](x)=\frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f(t)dt \quad pour\ x \neq 0$$

   a- Déterminer la valeur de $H_n[f]$ en 0 pour que H_n soit un endomorphisme.

   b- Soit A un réel positif et f élément de $\boldsymbol{E}^+$ on note $m(A,f)$ le réel $\underset{x\in[0,A]}{Sup}\ f(x)$.

   Montrer l'inégalité $m(A,T[f]) \leq \dfrac{m(A,f)}{2}$.

   En déduire que pour f élément de $\boldsymbol{E}^+$ et x réel positif $\lim_{n\to\infty} T^{(n)}[f](x) = 0$ .. Le résultat reste il valable pour f élément de $\boldsymbol{E}$?

   c- Montrer que pour f élément de $\boldsymbol{E}^+$ $\lim_{n\to\infty} H_n[f](x)=f(x)$.

   Le résultat reste il valable pour f élément de $\boldsymbol{E}$?

   Indication : On pourra remarquer que $H_n[f](x)-\dfrac{n}{n+1}f(x)$ *peut s'écrire* $\dfrac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n(f(t)-f(x))dt$ *et conclure en écrivant* $\int_0^x t^n(f(t)-f(x))dt=\int_0^\alpha t^n(f(t)-f(x))dt+\int_\alpha^x t^n(f(t)-f(x))dt$ *avec un réel* α *judicieusement choisi.*

3. Soit f un élément de $\boldsymbol{E}^+$ tel que l'intégrale $I = \int_0^{\infty} f(x)dx$ soit convergente.

a- Montrer que pour tout entier n strictement positif l'intégrale $J_n = \int_0^{\infty} H_n\left[f\right](x)dx$ est convergente et est égale à I

b- En déduire la convergence et l'expression de $\int_0^{\infty} T^{(n)}\left[f\right](x)dx$ (en fonction de I).

Rapprocher en les commentant les questions 2°-a , 2°-b et les questions 3. a- , 3. b-.
